

# Zeitablauf der Emission eines Festkörperlasers bei kleinen periodischen Änderungen der Resonatorgüte\*

E. BAYER, K. H. HELLWEGE und G. SCHAACK

Institut für Technische Physik der Technischen Hochschule Darmstadt

(Z. Naturforsch. **20 a**, 1181—1189 [1965]; eingegangen am 24. Juni 1965)

The time dependance of the intensity emitted by a laser, whose cavity- $Q$  is modulated periodically with a small amplitude  $a$  and frequency  $\omega_M$  is investigated (Internal Modulation). Only the case where  $\omega_M$  is of the same order of magnitude as the frequency of the relaxation oscillations  $\omega_0$  (in linear approximation) is regarded. By the introduction of a time dependance of the photon-lifetime  $\tau_L = \tau_0 (1 + a \cos \omega_M t)$ ,  $a \ll 1$  into the rate equations, approximate solutions in analytical form and numerical solutions of the complete equations are obtained.

Similar to the behaviour of a forced oscillator, the oscillations of the intensity emitted by such a laser are synchronized to the modulation of the cavity- $Q$  and the amplitudes reach a maximum, when  $\omega_M$  equals  $\omega_0$ . The halfwidth of this resonance-effect is proportional to the cavity- $Q$ .

For  $\omega_M < \omega_0$  the modulated intensity is superseded by undamped relaxation oscillations with frequency  $\omega_0$ , which are excited anew by each modulation cycle. The amplitude of these oscillations increases when  $\omega_M$  approaches  $\omega_0$ . For  $\omega_M > \omega_0$  the relaxation oscillations are damped out and relieved by forced oscillations of the lasers intensity with decreasing amplitudes for increasing  $\omega_M$ .

Observations with neodymium-glass rods in plane-parallel and concentric resonators and measurements of the amplitude of the modulation confirm the described behaviour.

Die beim Einsatz ungedämpfter elektromagnetischer Eigenschwingungen in Festkörperlasern auftretenden großen, meist unperiodischen zeitlichen Schwankungen der Schwingungsamplitude („Spikes“) sind seit der Entdeckung MAIMANS Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, und ihre Ursache kann heute als im Prinzip geklärt angesehen werden. Einzelheiten harren aber immer noch der Deutung, wie z. B. die unperiodische Folge der Spikes in manchen Resonatorformen. Es hat den Anschein, daß hier mehrere Einflüsse zusammenwirken und Anlaß zu dem komplizierten Erscheinungsbild geben. Als eine solche Störung muß, insbesondere bei Impulslasern, die Änderung (im allgemeinen Verringerung) der Resonatorgüte  $Q$  des Lasers während des Emissionsvorganges angesehen werden, die eine Folge der mit dem Pumpvorgang verbundenen plötzlichen und je nach Wahl der Pumpordnung lokal stark verschiedenen Erwärmung des aktiven Mediums ist. Neben der resultierenden thermischen Ausdehnung und Verspannung des Lasermaterials ist vor allem die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex für eine Änderung

der optischen Weglänge, d. h. für eine scheinbare Deformation des Resonators verantwortlich. Eine solche Änderung von  $Q$  erfolgt meist nicht periodisch, ihre Auswirkung auf die Emission des Lasers ist daher nur schwer zu übersehen. Es ist deshalb naheliegend, zunächst den Einfluß von Amplitude und Frequenz periodischer Änderungen von  $Q$  auf die Laseremission zu studieren. Die Ergebnisse einer solchen Untersuchung werden im folgenden dargestellt.

Ausgangspunkt der rechnerischen Analyse in dieser Arbeit sind die geläufigen Bilanzgleichungen<sup>1-3</sup>, deren Aussagen in mehreren Untersuchungen mit dem Experiment verglichen wurden, wobei sich teilweise gute Übereinstimmung ergab<sup>4, 5</sup>.

Für das folgende ist die Diskussion der Frage von Interesse, ob die Bilanzgleichungen auch für Pumpleistungen weit über dem Schwellenwert noch eine brauchbare Beschreibung darstellen. Diese Bilanzgleichungen in ihrer einfachsten Form wurden nämlich für eine einzelne Eigenschwingung und für ein homogen verbreitetes, metastabiles Elektronenniveau im Kristall hergeleitet. Sind gleichzeitig zwei

\* Auszugsweise vorgetragen auf der Physikertagung in Düsseldorf am 7. 10. 1964.

<sup>1</sup> H. STATZ u. G. DE MARS, Quantum Electronics (herausgeg. von C. H. TOWNES), Columbia Univ. Press, New York 1960, S. 530.

<sup>2</sup> R. DUNSMUIR, J. Electron. Control **10**, 453 [1961].

<sup>3</sup> D. A. KLEINMAN, Bell System Techn. J. **43**, 1505 [1964].

<sup>4</sup> K. GÜRS, Z. Naturforsch. **17 a**, 990 [1962] und **18 a**, 510, 1363 [1963].

<sup>5</sup> W. KAISER u. D. POHL, Phys. Letters **12**, 185 [1964].



oder mehrere Eigenschwingungen angeregt, so beschreiben diese Gleichungen das Zeitverhalten des Lasers nicht vollständig, weil die Besetzungsinversion nicht, wie in der einfachsten Form der Bilanzgleichungen angenommen, konstant ist, sondern infolge des Auftretens von ortsfesten Knoten und Bäuchen der elektrischen Feldstärke in den Eigenschwingungen lokale Schwankungen aufweist, wodurch die einzelnen Eigenschwingungen eine von einander verschiedene, zeitlich variable und von der Amplitude der anderen gleichzeitig oszillierenden Eigenschwingungen abhängige Verstärkung erfahren<sup>6,7</sup>. In dem Maße, in dem die Zahl der gleichzeitig angeregten Schwingungen mit steigender Pumpleistung zunimmt, geht der Einfluß der Ortsabhängigkeit der Besetzungsinversion wieder zurück und die verschiedenen Eigenschwingungen erfahren annähernd gleiche Verstärkung. In diesem Bereich liefern die einfachen Bilanzgleichungen mit einer summarischen Beschreibung aller Eigenschwingungen dann wieder eine brauchbare Beschreibung der Lasertätigkeit. Dies gilt insbesondere für ausgesprochene „Multimode-Laser“. Die verschiedenen experimentellen Bestätigungen dieser Theorie gelten alle für diesen Bereich<sup>4,8</sup>. Ebenso zeigt sich, daß auch für Laser mit stark inhomogen verbreiterten Elektronentermen<sup>5</sup> die Bilanzgleichungen eine gute Beschreibung darstellen. Wir dürfen also erwarten, daß bei einer Pumpleistung, die den Schwellenwert wenigstens um einige Prozent überschreitet, Modulationsexperimente durch die einfachen Bilanzgleichungen in sinnvoller Weise beschrieben werden können.

### 1. Näherungslösungen der Bilanzgleichungen für zeitlich variable Aufenthaltsdauer der Photonen im Resonator

Die Bilanzgleichungen können in der Form (vgl.<sup>9</sup>)

$$d\mu/dt = -c_1 \mu \lambda + c_2 (\mu_1 - \mu), \quad (1)$$

$$d\lambda/dt = c_3 \mu \lambda - c_4 \lambda \quad (2)$$

geschrieben werden.

In (1) und (2) und in Tab. 1 bedeuten:

$\lambda$  : Zahl der Photonen im Resonator pro aktivem Ion,  
 $\mu$  : Inversion,

<sup>6</sup> C. L. TANG, H. STATZ u. G. DE MARS, J. Appl. Phys. **34**, 2289 [1963].

<sup>7</sup> H. STATZ u. C. L. TANG, J. Appl. Phys. **35**, 1377 [1964].

$N$  : Gesamtzahl der aktiven Ionen im Resonator,  
 $B$  : EINSTEIN-Koeffizient,  
 $p$  : Pumprate,  
 $\tau_a$  : Lebensdauer des angeregten, metastabilen Niveaus,  
 $\tau_L$  : Lebensdauer der Photonen im Resonator,  
 $\mu_1$  : Inversion, die sich ohne Anwesenheit von Strahlung ( $\lambda = 0$ ) einstellen würde.

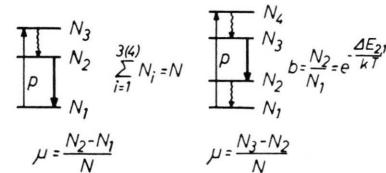


Abb. 1. Bezeichnungen im Termschema für Drei- und Vier-niveaulaser.

Die Gln. (1) und (2) gelten in dieser Form für Drei- und Vierniveausysteme (Abb. 1), wobei die Konstanten aber verschiedene Bedeutung haben (Tab. 1). Diese Tabelle enthält außerdem die sta-

Konst.	Dreiniveausystem	Vierniveausystem	Gl.
$c_1$	$2BN$	$BN(1+b)$	(3)
$c_2$	$p+1/\tau_a$	$p(1-b)+1/\tau_a$	(4)
$c_3$	$BN$	$BN$	(5)
$c_4$	$1/\tau_L$	$1/\tau_L$	(6)
$\mu_1$	$p-1/\tau_a$	$p(1-b)-b/\tau_a$	(7)
	$p+1/\tau_a$	$p(1-b)+1/\tau_a$	
$\mu_0$	$1/(\tau_L BN)$	$1/(\tau_L BN)$	(8)
$\lambda_0$	$(c_2/c_1)(\mu_1/\mu_0 - 1)$	$(c_2/c_1)(\mu_1/\mu_0 - 1)$	(9)
$\omega_0^2$	$2(BN)^2 \mu_0 \lambda_0$	$(1+b)(BN)^2 \mu_0 \lambda_0$	(10)
$\tau_R$	$2\mu_0/(p-1/\tau_a)$	$2\mu_0/[p(1-b)-b/\tau_a]$	(11)

Tab. 1. Konstanten für ein Drei- und Vier-Niveausystem in den Gln. (1) und (2), stationäre Lösungen  $\mu_0$  und  $\lambda_0$  sowie Frequenz  $\omega_0$  und Abklingzeit  $\tau_R$  der Relaxationsschwingungen in linearer Näherung.

tionären Lösungen  $\mu_0$  und  $\lambda_0$  dieser Gleichungen, sowie die in linearer Näherung berechneten<sup>2</sup> Frequenzen und die Abklingzeiten der Relaxations schwingungen, die im folgenden häufig gebraucht werden.

Man erhält jetzt eine Näherungslösung für den zeitlichen Ablauf der Laseremission bei periodisch schwach variierender Resonatorgüte, indem man für die Lebensdauer  $\tau_L$  der Photonen im Resonator oder für die Resonator-Güte  $Q = \tau_L \cdot \omega$  den Ansatz

$$\tau_L = \tau_0 (1 + a \cos \omega_M t), \quad a \ll 1 \quad (12)$$

in die Bilanzgleichungen einführt.  $\omega_M$  ist die von außen aufgebrachte Modulationsfrequenz. In linea-

<sup>8</sup> D. RÖSS, Z. Naturforsch. **19a**, 1169 [1964].

<sup>9</sup> D. M. SINNETT, J. Appl. Phys. **33**, 1578 [1962].

rer Näherung, d. h. für

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon, \quad \lambda = \lambda_0 + \eta; \quad \varepsilon \ll \mu_0; \quad \eta \ll \lambda_0$$

und bei Vernachlässigung von Produkten von  $\varepsilon, \eta$ ,  $a$  erhält man in Analogie zu<sup>2</sup> die Differentialgleichung für die Abweichung  $\eta$  der Lichtquantenzahl vom stationären Zustand  $\lambda_0$ :

$$\ddot{\eta} + \frac{2}{\tau_R} \cdot \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = \frac{a \lambda_0}{\tau_0} \left( \frac{2}{\tau_R} \cdot \cos \omega_M t - \omega_M \cdot \sin \omega_M t \right). \quad (13)$$

Die linke Seite dieser Diff.-Gl. ist identisch mit der von DUNSMUIR<sup>2</sup> behandelten, die zu den gedämpften Relaxationsschwingungen führt, die rechte Seite beschreibt die Wirkung der periodischen Güteänderung. Diese inhomogene Diff.-Gl. führt zu der Lösung

$$\lambda = \lambda_0 \left\{ 1 + \frac{2 a \cos \omega_M t / (\omega_0^2 \tau_R \tau_0)}{(1 - (\omega_M / \omega_0)^2)^2 + (2 \omega_M / \tau_R \omega_0^2)^2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \omega_M t) \right\} \quad (14)$$

mit

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 - (\omega_M / \omega_0)^2) \cdot (\omega_M \tau_R / 2) - 2 \omega_M / (\tau_R \omega_0^2). \quad (15)$$

Der Verlauf  $\lambda = \lambda(\omega_M)$  ist gekennzeichnet durch den Resonanznennner und den Verlauf des Phasenwinkels  $\varphi$ . Gl. (4) beschreibt also ein Anwachsen der Amplitude der modulierten Laseremission beim Annähern der Modulationsfrequenz  $\omega_M$  an die Frequenz der freien Relaxationsschwingungen  $\omega_0$ . Diese Resonanzüberhöhung ist proportional zur Modulationsamplitude  $a$  und umgekehrt proportional zur Resonatorgüte  $\omega \tau_0$ . Letzteres Ergebnis steht im Einklang mit der allgemeinen Erfahrung, wonach die Laseremission um so stabiler erfolgt, d. h. die mittlere Amplitude der Relaxationsschwingungen um so kleiner ist, je höher  $\tau_0$  ist.

Der Verlauf von  $\varphi$  mit  $\omega_M / \omega_0$  ist in Abb. 2 dargestellt,  $\operatorname{tg} \varphi$  nimmt überall, außer in unmittelbarer Nähe der Resonanzstelle  $\omega_M = \omega_0$ , hohe Werte an. Durch dieses Verhalten wird die Halbwertsbreite der Funktion  $\lambda = \lambda(\omega_M)$  in der Nähe von  $\omega_M = \omega_0$  vergrößert gegenüber dem durch den Resonanznennner gegebenen Wert einer LORENTZ-Kurve. Abb. 3 zeigt für die angegebenen Parameterwerte den durch (14) gegebenen Verlauf der Modulationsamplitude zusammen mit Werten, die durch numerische Integration des vollständigen Gleichungssystems (1), (2) nach dem RUNGE-KUTTA-Verfahren für die gleichen

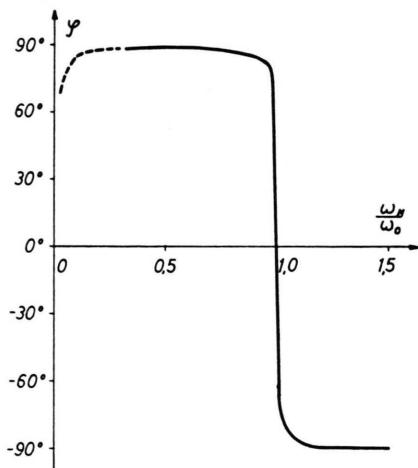


Abb. 2. Phasenverschiebung zwischen Gütemodulation und Emission des Lasers.

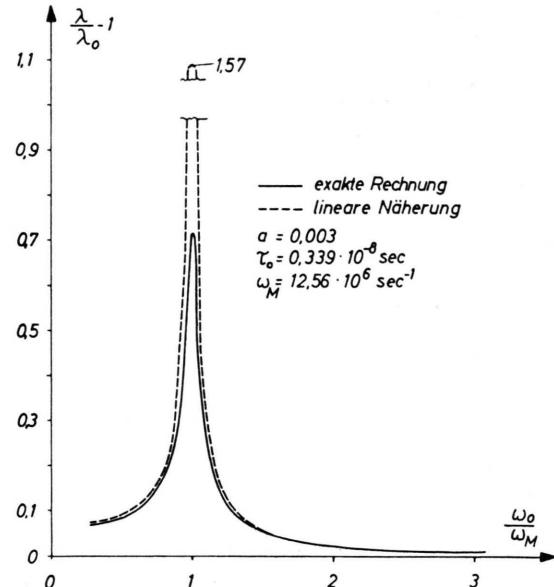


Abb. 3. Modulationsamplitude der Laseremission als Funktion des Verhältnisses der Frequenz der freien Relaxations- schwingungen zur Modulationsfrequenz, berechnet in der linearen Näherung nach (14) und (15) sowie durch numerische Integration der Gln. (1) und (2).

Parameterwerte gewonnen wurden. Die Differenzen beider Kurvenverläufe im Bereich der Resonanz sind durch ein Überschreiten der Gültigkeitsgrenzen für die Rechnung in linearer Näherung bedingt, weil hier für den Wert  $a = 0,003$  die Voraussetzung  $\eta \ll \lambda_0$  nicht mehr erfüllt ist. Allgemein erkennt man jedoch, daß bereits für sehr kleine Änderungen  $a$  der Resonatorgüte durch Ausnutzen dieses Resonanz-

effektes ein hoher Modulationsgrad erzielt werden kann.

Für die weitere Diskussion wollen wir der einfacheren Schreibweise halber annehmen, daß die Pumpleistung wenigstens einige Prozent über dem Schwellenwert liegt, dann ist nämlich  $\omega_0^2 \tau_0 \tau_R \approx 2$  in sehr guter Näherung erfüllt.

Für die einzelnen Größenbereiche des Verhältnisses  $\omega_M/\omega_0$  erhält man dann die folgenden übersichtlicheren Näherungsformeln:

a)  $\omega_M/\omega_0 \ll 1$ :

$$\lambda = \lambda_0 \left\{ 1 + a \left( 1 + \frac{1}{2} (\omega_M \tau_R/2)^2 \right) \cos \omega_M (t + \tau_R/2) \right\}. \quad (16)$$

b)  $\omega_M/\omega_0 \leq 1$ :

In diesem Falle liefert (15) sehr große positive oder negative Werte von  $\tan \varphi$ , d. h. wir können angenähert  $\varphi = \pm \pi/2$  annehmen und erhalten:

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 - \frac{a \omega_M}{\tau_0 (\omega_0^2 - \omega_M^2)} \sin \omega_M t \right). \quad (17)$$

In diesem Bereich ist also das Resonanzverhalten deutlich ausgeprägt.

c)  $\omega_M/\omega_0 = 1$ :

Hier liefert die lineare Näherung nur für sehr kleine  $a$  brauchbare Werte. Es gilt:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \frac{1}{2} (a \tau_R / \tau_0) \cos \omega_M t). \quad (18)$$

Neben der bereits diskutierten Abhängigkeit von  $\tau_0$  zeigt (18) für den Resonanzfall eine Abnahme der modulierten Amplitude mit abnehmender Abklingzeit  $\tau_R$ , also zunehmender Pumpleistung, ganz entsprechend dem Verhalten der freien Relaxations schwingungen.

Für den Fall  $\omega_M/\omega_0 \gg 1$ , der in linearer Näherung durch b) mit erfaßt wird, kann man durch iterative Lösung von (1) und (2) eine andere Näherungslösung erhalten, deren Gültigkeit nicht, wie die lineare Näherung, an die Voraussetzung kleiner Abweichungen  $\eta$  und  $\varepsilon$  von den stationären Werten  $\lambda_0$  und  $\mu_0$  gebunden ist. Zu diesem Zweck führt man in die stationäre Lösung die variable Lebensdauer  $\tau_L$  nach Gl. (12) ein. Mit diesem Ansatz und der Voraussetzung  $\tau_R \omega_M \gg 1$ , die für  $\omega_M/\omega_0 \gg 1$  immer erfüllt ist, geht man in die Gl. (1) ein und erhält eine Näherungslösung für  $\mu$ , die in (2) eingesetzt nach einiger Rechnung in erster Näherung liefert:

$$\lambda^{(1)} = \lambda_0 \cdot \exp \{ [a / (\tau_0 \omega_M)] \sin \omega_M t \}.$$

Die zweite Näherung führt zu dem Ergebnis:

$$\lambda^{(2)} = \lambda_0 \cdot \exp \{ [a / (\tau_0 \omega_M)] [1 + (\omega_0 / \omega_M)^2] \cdot \sin \omega_M t \} \quad (19)$$

Bei der Berechnung dieser Ausdrücke sind alle Glieder, die für  $t \rightarrow \infty$  verschwinden, nicht berücksichtigt worden. Gl. (19) überschreitet mit zunehmender Größe von  $a / (\tau_0 \omega_M)$  den Gültigkeitsbereich der linearen Näherung und beschreibt dann die typischen spitzen „spikes“. Für  $a / (\tau_0 \omega_M) \ll 1$  hingegen sind die beiden ersten Glieder einer Entwicklung von (19) identisch mit einer Entwicklung von (17) für  $\omega_M/\omega_0 \gg 1$ .

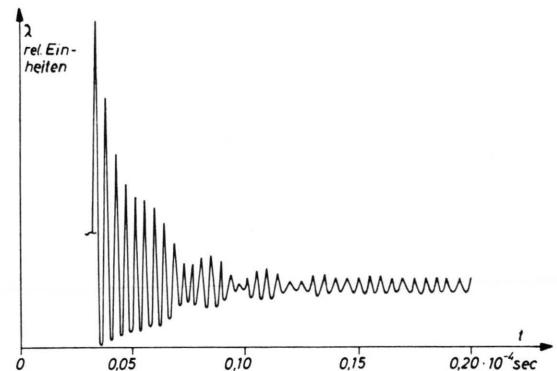


Abb. 4. Berechnete Emission eines Lasers bei innerer Modulation.  $a = 0,003$ ,  $\omega_0/\omega_M = 1,23$ .

5 a

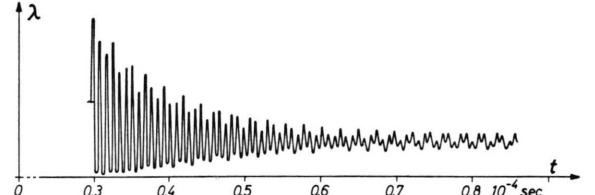
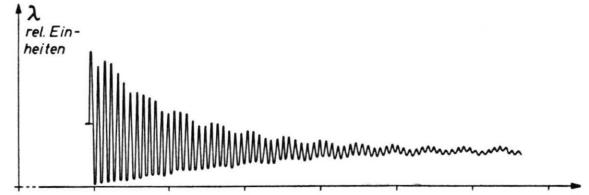


Abb. 5. Berechnete Emission eines Lasers bei innerer Modulation. a)  $a = 0,006$ ;  $\omega_0/\omega_M = 6,2$ ; b)  $a = 0,006$ ;  $\omega_0/\omega_M = 3,1$ .

Die vollständige Lösung von (1) und (2) enthält zusätzlich noch die Lösung der homogenen Gleichung, d. h. die gedämpft abklingenden Relaxationsschwingungen, und stellt eine Überlagerung beider Vorgänge dar. In den Abb. 4 und 5 sind

solche numerisch berechnete Lösungen der Bilanzgleichungen dargestellt. In Abb. 5 ( $\omega_M/\omega_0 < 1$ ) erkennt man, daß die freien Relaxationsschwingungen nicht wie im Falle  $\omega_M/\omega_0 > 1$  (Abb. 4) völlig verschwinden und von den synchron zur Modulation auftretenden Impulsen abgelöst werden, sondern daß sich den Modulationsimpulsen zusätzlich noch Relaxationsschwingungen der Frequenz  $\omega_0 > \omega_M$  überlagern, die nicht wie gewohnt abklingen, sondern durch jeden Modulationsimpuls erneut angefacht werden. Diese Überlagerung ist in unserer bisherigen Beschreibung nicht enthalten, weil alle Nichtlinearitäten und Glieder, die mit der Zeit exponentiell ab- oder zunehmen, nicht berücksichtigt sind.

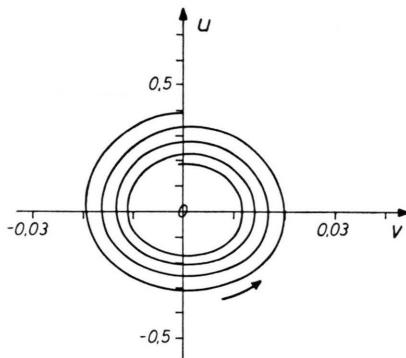


Abb. 6. Beispiel für die gedämpften Relaxationsschwingungen eines unmodulierten Lasers, konstruiert mit dem Neigungsfeld nach Gl. (20),  $\omega_0 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}$ .

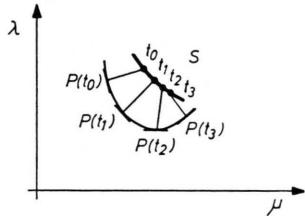


Abb. 7. Beispiel für die Konstruktion der Integralkurve zu (20) bei variabler Lage des singulären Punktes  $S$ .

Zur Darstellung dieser Vorgänge eignet sich eine andere anschauliche, halb-quantitative Beschreibung der Laseremission bei variabler Resonatorgüte, die man erhält, indem man aus den Bilanzgleichungen (1) und (2) die Zeit eliminiert und die entstehende Diff.-Gl.

$$d\mu/d\lambda = F(\mu, \lambda), \quad (20)$$

die die Zeit  $t$  nur noch als Parameter enthält, grafisch in einer  $\mu\text{-}\lambda$ -Ebene für vorgegebene Anfangs-

werte  $\mu', \lambda'$  löst (zunächst werde  $\tau_L$  konstant gehalten). Die Funktion  $F(\mu, \lambda)$  liefert ein Neigungsfeld; eine in dieses Feld eingezeichnete Integralkurve hat eine Form ähnlich einer Spirale, die sich um den singulären Punkt  $\mu_0, \lambda_0$  windet<sup>9</sup>. Jeder Umlauf um diesen singulären Punkt entspricht einer Relaxationsschwingung. In Abb. 6 ist für die angegebenen Parameter und Anfangswerte eine solche Lösungskurve in dem Neigungsfeld als Beispiel konstruiert. Durch die Koordinatentransformation

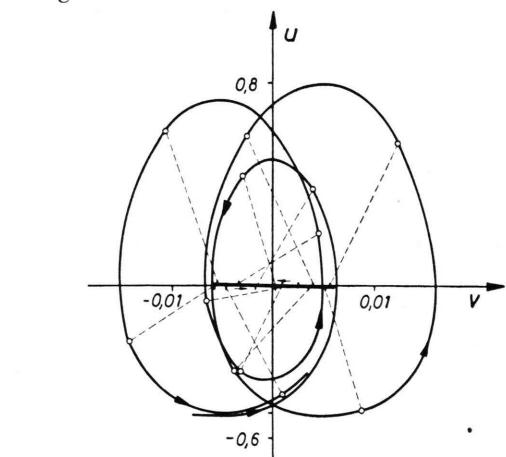
$$v = \mu/\mu_0 - 1, \quad u = \lambda/\lambda_0 - 1$$

ist hier der singuläre Punkt in den Nullpunkt des  $u\text{-}v$ -Koordinatensystems verschoben.

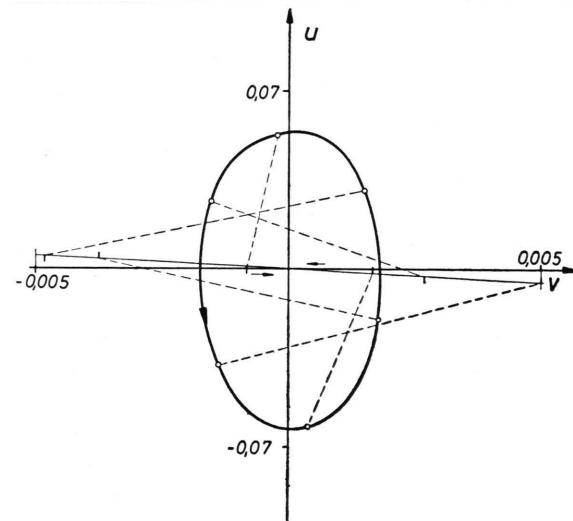
Führt man jetzt die variable Lebensdauer  $\tau_L$  gemäß (12) ein, so pendelt der singuläre Punkt  $S$  von (20) im Takt der Modulationsfrequenz und mit einer zu  $a$  proportionalen Amplitude um den Ruhepunkt  $S_0$  auf der in Abb. 7 gezeichneten Kurve. Sind zu einem Zeitpunkt  $t_0$  Lichtquantenzahl  $\lambda$  und Besetzungsinversion  $\mu$  durch den Punkt  $P$  gekennzeichnet, dann hängt der Verlauf der von  $P$  ausgehenden Integralkurve ab von der Lage von  $P$  zur Momentanlage von  $S$ . Man kann also den genauen Verlauf der Integralkurve konstruieren, indem man um jeden Ort  $S(t)$  das zugehörige Neigungsfeld aufträgt und, von  $P$  ausgehend, die Integralkurve mit dem zum jeweiligen Parameterwert  $t$  gehörenden Neigungsfeld konstruiert. Man erkennt jetzt, daß die Integralkurve so lange nicht in den singulären Punkt einmünden, d. h. die Laseremission nicht den stationären Wert erreichen kann, solange  $S$  sich in der  $\lambda\text{-}\mu$ -Ebene bewegt. Die Integralkurve folgt  $S$  in Spiralen, der Laser führt also Relaxationsschwingungen aus, deren Amplituden von der Geschwindigkeit von  $S$  in der  $\lambda\text{-}\mu$ -Ebene abhängen und bei periodischer Bewegung von  $S$  von dem Frequenzverhältnis  $\omega_0/\omega_M$ . Zur Vereinfachung der Konstruktion der Integralkurve bei periodischer Bewegung kann man annehmen, daß sich für kleine  $a$ -Werte, d. h. kleine Amplituden von  $S$  um  $S_0$ , und für kleine Werte  $\lambda - \lambda_0$  und  $\mu - \mu_0$  das Neigungsfeld nur unwesentlich ändert, so daß stets mit dem für  $S_0$  gültigen Feld gearbeitet werden kann, der Punkt  $S$  also dieses Feld bei seiner Bewegung mitführt. Zur Bestätigung dieser Annahme ist in Gl. (21) die Diff.-Gl. (20) um den singulären Punkt  $S_0$  für kleine  $a$  entwickelt worden:

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{(\tau_0 \omega_0)^2} \left\{ \frac{v(u-d)}{u(v+1)+v} + \frac{v[u(u+2)+(1+d)(v-u)]}{(u(v+1)+v)^2} \cdot a \sin \omega_M t + [a^2] + \dots \right\}, \quad d = \mu_0/\mu_1 - 1. \quad (21)$$

Das erste Glied in der geschweiften Klammer mit der Singularität bei  $u = v = 0$  liefert das Neigungsfeld um den Punkt  $S_0$ , das zweite Glied dessen Veränderungen für kleine  $a$ . Da auch dieses Glied außer für  $u = v = 0$  regulär ist, kann für hinreichend kleine  $a$ ,  $u$  und  $v$  sein Beitrag zum Neigungsfeld vernachlässigt werden.



8 a



8 b

Abb. 8. Verlauf der Integralkurve zu (20) in der  $u$ - $v$ -Ebene für einen modulierten Laser. a)  $\omega_0/\omega_M = 2,94$ ; b)  $\omega_0/\omega_M = 0,158$ . Die gestrichelten Linien verbinden zusammengehörige Punkte auf der Integralkurve mit den Momentanlagen von  $S$  auf der Modulationsgeraden.

In Abb. 8 ist die angegebene Konstruktion für zwei Fälle

$$\omega_0/\omega_M > 1 \quad (8 \text{ a}); \quad \omega_0/\omega_M < 1 \quad (8 \text{ b})$$

<sup>10</sup> M. Di DOMENICO JR., J. Appl. Phys. **35**, 2870 [1964].

ausgeführt für einen Zeitpunkt nach dem Einsatz der Laseremission, wo im Falle verschwindender Modulation die Relaxationsschwingungen bereits vollständig abgeklungen wären. Der Punkt  $S$  bewegt sich unter dem Einfluß der Modulation auf der Geraden:

$$u \approx a \mu_1 \cos \omega_M t / (\mu_1 - \mu_0); \quad v \approx -a \cdot \cos \omega_M t.$$

Diese Gerade ist eingezeichnet, zeitlich aufeinanderfolgende Lagen von  $S$  sind durch Punkte auf der gleichen Seite dieser Geraden angedeutet, der Umlaufsinn durch Pfeile gekennzeichnet. Punkte auf den Lösungskurven sind durch gestrichelte Geraden mit den zugehörigen Momentanwerten von  $S$  verbunden. Für  $\omega_0 > \omega_M$  beschreibt die Integralkurve viele enge Umläufe um den singulären Punkt, während dieser einmal die Modulationsgerade durchläuft, die Laseremission hat dann beispielsweise die in Abb. 5 a dargestellte Form. Mit abnehmendem Verhältnis  $\omega_0/\omega_M$  sinkt entsprechend die Zahl der Umläufe pro Modulationsperiode, dafür weiten sich die Lösungskurven in der  $u$ - $v$ -Ebene auf (Abb. 5 b, 8 a), die Amplitude der Relaxationsschwingungen nimmt zu. Im Falle  $\omega_0 = \omega_M$  bildet die Lösungskurve eine einfach geschlossene Kurve, die die Modulationsgerade völlig einschließt und weit über ihre Endpunkte hinausläuft. Im Falle  $\omega_0 < \omega_M$  bleibt die Kurve einfach geschlossen, sie zieht sich jetzt aber mit wachsender Frequenz  $\omega_M$  und abnehmender Umlaufzeit wieder zusammen um den Punkt  $S_0$ , den sie für  $\omega_0 \ll \omega_M$  erreicht, die Laseremission vermag den zu rasch erfolgenden Güteänderungen nicht mehr zu folgen (siehe aber <sup>10, 11</sup>).

Diese Betrachtungsweise vermag auch das Anfachen von Relaxationsschwingungen bei Schwingungen der Pumprate  $p$  zu verdeutlichen. Nach (8) und (9) bewegt sich jetzt der Punkt  $S$  auf der  $u$ -Achse und die eben skizzierten Überlegungen gelten entsprechend. Treten unperiodische Schwankungen sowohl der Pumprate als auch der Resonatorgüte auf, dann beschreibt  $S$  in der  $u$ - $v$ -Ebene eine im allgemeinen nicht geschlossene Bahn, als deren Folge regellose Relaxationsschwingungen beobachtet werden können.

## 2. Experimentelle Beobachtungen

Zur experimentellen Überprüfung der dargestellten Beziehungen haben wir Modulationsversuche an

<sup>11</sup> J. P. KAMINOW, Appl. Optics **4**, 123 [1965].

Lasern aus Neodymglas LG 52 der Jenaer Glashütte Schott u. Gen., Mainz, ausgeführt. Dieses Lasermaterial hat gegenüber den meisten kommerziell erhältlichen einkristallinen Materialien den Vorteil größerer optischer Homogenität, wodurch die Ausbildung regelmäßiger Relaxations schwingungen begünstigt wird<sup>5, 12</sup>. Die stark inhomogene Termverbreiterung in diesem Material schränkt die Gültigkeit der Bilanzgleichungen nicht ein<sup>5</sup>, sie begünstigt dagegen die gleichzeitige Anregung einer größeren Zahl von axialen Eigenschwingungen<sup>13</sup>.

Die Modulation der Photonenlebensdauer im Resonator erfolgte nach den schon früher<sup>14-17</sup> beschriebenen, technisch einfachen Verfahren der Anregung elastischer Eigenschwingungen in dem aktiven Medium auf piezoelektrischem Weg (Dickschwingungen des Glaszyinders) im Frequenzbereich zwischen 300 kHz und 800 kHz und auf magnetostriktivem Weg (Biegeschwingungen des Stabes) im Bereich zwischen 10 kHz und 90 kHz. Durch die mit den mechanischen Schwingungen des aktiven Mediums erzeugten Inhomogenitäten des Brechungsindex und Deformationen des Resonators wird auf im einzelnen komplizierte Weise die Resonatorgüte periodisch variiert. Dabei zeigt sich, daß die auf diese Weise mit üblichen Mitteln erreichbare Modulationsamplitude  $a$  gerade eine solche Größe hat, wie sie im Gültigkeitsbereich obiger Rechnungen zugelassen werden kann. Ein elektrooptisches Verfahren zur internen Modulation, das gleichartige Experimente erlaubt, hat GÜRS<sup>18</sup> beschrieben.

Im Idealfall eines völlig homogenen Laserkristalles ist die Modulationsfrequenz  $\omega_M$  gleich der doppelten Frequenz der Ultraschallschwingung oder der an den elektrooptischen Verschluß angelegten Wechselspannung. Sind im Resonator noch Inhomogenitäten vorhanden, so kann die dadurch bedingte Güteminderung durch eine mit der mechanischen Modulation verknüpfte Deformation teilweise kompensiert werden, dann ist im allgemeinen  $\omega_M$  gleich der Ultraschallfrequenz. In die oben angegebenen Beziehungen ist stets der tatsächlich beobachtete Wert  $\omega_M$  einzusetzen.

<sup>12</sup> E. SNITZER in Quantum Electronics (herausgeg. von P. GRIVET u. N. BLOEMBERGEN), Dunod, Paris, Columbia Univ. Press, New York 1964, S. 999.

<sup>13</sup> H. MANGER, Z. Angew. Phys. **18**, 265 [1965].

<sup>14</sup> E. BAYER, K. H. HELLWEGE u. G. SCHAAACK, Phys. Letters **5**, 33 [1963]; **6**, 243 [1963].

Die Versuche wurden in zwei verschiedenen Resonatorformen ausgeführt. Es wurde ein mit ebenen, dielektrisch verspiegelten ( $R_1 = 99,5\%$ ,  $R_2 = 95\%$ ) Endflächen versehener Stab (70 mm Länge, 7 mm Durchmesser, polierte Mantelfläche) benutzt sowie eine konzentrische Resonatoranordnung mit zwei Außenspiegeln, die einen Krümmungsradius von 1 m, einen Durchmesser von 23 mm hatten, eine dielektrische Verspiegelung ( $R_1 = 99,5\%$ ,  $R_2 = 95\%$ ) trugen und mit einem unbelegten Glasstab gleicher Abmessungen wie oben im gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt. In beiden Fällen wurde mit einer stabförmigen Blitzlampe in einem elliptischen Zylinder gepumpt. Wichtig für eine störungsfreie Beobachtung des Modulationseffektes ist eine hohe Homogenität des Glases und eine einwandfreie Beschaffenheit der Spiegel. Die Homogenität des Glases wurde durch die zur magnetostriktiven Anregung von Biegeschwingungen<sup>14</sup> notwendige kreissymmetrische

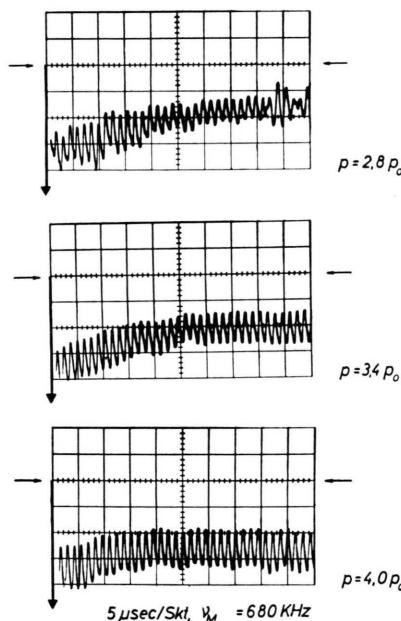


Abb. 9. Emission eines modulierten Lasers mit Neodym-glas und PÉROT-FABRY-Geometrie nach Abklingen der beim Schwingungseinsatz auftretenden Relaxations schwingungen.  $\omega_0 = 1,38 \cdot 10^{16} \text{ sec}^{-1}$ ,  $1,57 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $1,70 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$  (von oben nach unten). Die Pfeile kennzeichnen die Lage der Abszisse.

<sup>15</sup> G. E. DANIELSON JR. u. A. J. DE MARIA, Appl. Phys. Letters **5**, 123 [1964].

<sup>16</sup> H. INABA u. T. KOBAYASHI, Z. Angew. Math. Phys. **16**, 66 [1965].

<sup>17</sup> Y. SAKAI, Proc. I.E.E.E. **53**, 204 [1965].

<sup>18</sup> K. GÜRS, Z. Phys. **172**, 163 [1963].

trische Einspannung beider Stabenden beeinträchtigt. Die schädlichen Auswirkungen dieser Inhomogenitäten ließen sich weitgehend durch das Einbringen von Irisblenden mit wenigen Millimetern Durchmesser in den Resonator vor die Kugelspiegel beseitigen. Dadurch wurde die Zahl der angeregten elektromagnetischen Eigenschwingungen verringert und auf axiale Typen oder transversale niedriger Ordnung beschränkt.

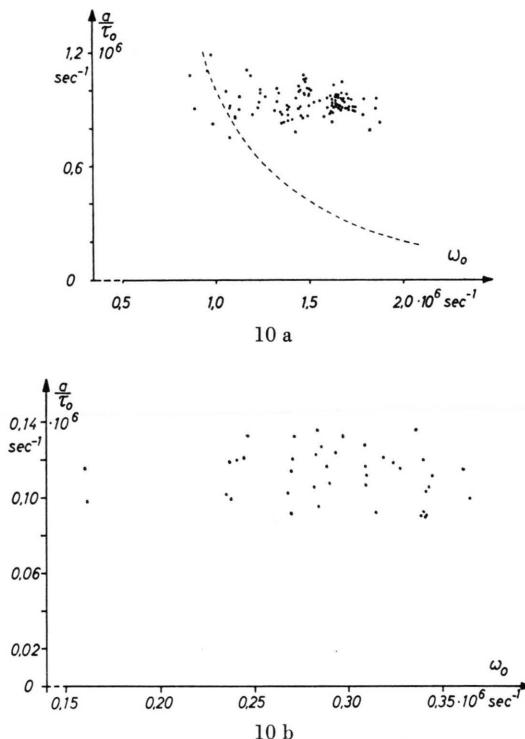


Abb. 10. Aus zwei Beobachtungsreihen gemäß Abb. 9 nach (17) berechnete Werte  $a/\tau_0$ . Die in Abb. 10 a gestrichelt eingezeichnete Kurve gibt zum Vergleich in dieser Darstellung den Verlauf der modulierten Amplitude an, wenn diese konstant, d. h. unabhängig von der Pumpleistung wäre.

Die Eigenfrequenzen der elastischen Dickenschwingungen liegen durchweg höher als die Frequenzen der Relaxationsschwingungen bei normalen Pumpleistungen. Bei dieser Modulationsart liegt also der in Formel (18) in linearer Näherung oder in (19) beschriebene und in Abb. 4 dargestellte Fall vor. Abb. 9 zeigt oszillographische Registrierungen der modulierten Emission des planparallelen Lasers mit den angegebenen experimentellen Daten. Dabei wurde die Ultraschallerregung konstant gehalten und die Pumpleistung von Aufnahme zu Aufnahme erhöht. Nach Formel (9) ist für Pumpleistungen

nicht zu nahe am Schwellenwert  $p_0$  (s. o.) die emittierte Leistung des Lasers proportional zu der  $p_0$  übersteigenden Pumpleistung:  $\lambda_0 \approx \tau_0(p - p_0)$ , ebenso ist  $\omega_0^2 \sim p - p_0$  wegen (10). Bei festgehaltener Modulationsfrequenz und steigender Pumpleistung nimmt also der Resonanznennner in (17) ab, d. h. die modulierte Amplitude zu. Zur quantitativen Auswertung von Abb. 9 und ähnlicher Aufnahmen wurden Maxima und Minima der Emission sowie die Höhe des Mittelwerts ( $\lambda_0$ ) über der Nulllinie ausgemessen. Die Werte von  $\omega_0$  wurden Aufnahmen der unmodulierten Emission bei gleicher Pumpleistung entnommen. Die für benachbarte Maxima und Minima gewonnenen Werte wurden in Gl. (17) eingesetzt und lieferten für jeden Impuls einen Wert von  $a/\tau_0$ . Bei Gültigkeit der Beziehung (17) sollte sich ein konstanter Wert für  $a/\tau_0$  ergeben. Abb. 10 zeigt, inwieweit dieser Zusammenhang für zwei Meßreihen erfüllt ist. Man erkennt eine starke Streuung der Meßpunkte um den konstanten Mittelwert, die auch schon in einer Schwankung der modulierten Amplituden in Abb. 9 zum Ausdruck kommt. Es sind dies die Folgen von Störungen im Emissionsablauf des Lasers, die neue Relaxationsschwingungen anfangen (s. o.) und besonders bei niedrigen Pumpleistungen wegen der daraus resultierenden geringen Dämpfung dieser Schwingungen stark ausgeprägt sind. In Tab. 2 sind die aus diesen Beobachtungen für die speziellen Anregungsbedingungen bestimmten Mittelwerte  $a/\tau_0$  für beide Laser-Anordnungen aufgeführt, zusammen mit Werten für die mittlere Photonaufenthaltsdauer  $\tau_0$ , die aus dem Abklingen unmodulierter Relaxationsschwingungen nach (10) und (11) bestimmt wurden. Die daraus gewonnenen  $a$ -Werte für die akustische Variation der Resonatorgüte liegen im Gültigkeitsbereich der oben angeführten Rechnungen.

Laser-Anordnung	$a/\tau_0$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$\tau_0$ [s]	$a$
$\alpha$	$0,904 \cdot 10^6$	$35,5 \cdot 10^{-9}$	0,032
$\beta$	$0,112 \cdot 10^6$	$222 \cdot 10^{-9}$	0,025

Tab. 2. Für planparallele ( $\alpha$ ) und konzentrische ( $\beta$ ) Laseranordnung experimentell ermittelte Werte  $a/\tau_0$ , mittlere Photonaufenthaltsdauer  $\tau_0$  und Modulationsamplitude  $a$ .

In Abb. 11 ist die Emission eines magnetostriktiv modulierten Lasers in konzentrischer Anordnung mit 12 mm-Blende vor einem Spiegel für den Fall  $\omega_M/\omega_0 < 1$  dargestellt. Man erkennt die synchron mit der Modulation erfolgende Variation des kon-

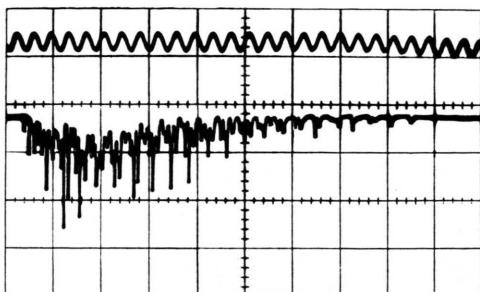


Abb. 11. Untere Spur: Emission eines modulierten Neodymglas-Lasers in konzentrischer Anordnung,  $\omega_0/\omega_M > 1$ ; obere Spur: Wechselspannung am magnetostruktiven Swinger,  $\omega_M = 0,085 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ; 0,2 msec pro Skalenteil.

tinuierlichen Anteils der Emission, der, wie oben erläutert, an- und abklingende Relaxationsschwingungen überlagert sind. Wegen dieser Überlagerung ist eine quantitative Bestimmung der Modulationsamplitude nur ungenau möglich. Ungefährre Werte sind:

$$a/\tau_0 = 0,43 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, \quad \tau_0 = 130 \cdot 10^{-9} \text{ s}, \quad a = 0,056.$$

Mit dieser Modulationsart sind auch Beobachtungen im Bereich der „Resonanz“ ( $\omega_M/\omega_0 \approx 1$ ) möglich. Man beobachtet schon bei sehr kleinen Ultraschallamplituden eine deutliche Abnahme der Halbwertsbreite und Zunahme der Amplitude der einzelnen

Impulse gegenüber der unmodulierten Emission. Steigert man die Ultraschallamplitude, so wird der Emissionsablauf unregelmäßig, es treten in größeren Abständen einzelne, sehr intensive und schmale Impulse auf, die die Besetzungsinversion so weit absinken lassen, daß die synchron zur Modulation erwarteten nächsten Impulse nicht ausgebildet werden können. Ein derartiges Verhalten haben wir qualitativ auch durch numerische Integration der Bilanzgleichungen mit geeignet gewählten Werten für  $\omega_0 \approx \omega_M$ ,  $a \approx 10^{-2}$  bestätigt gefunden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß man für technische Anwendungen der internen Modulation, etwa zur Erzeugung von Lichtimpulsen in gleichen Zeitintervallen, die Anordnung zweckmäßig so dimensioniert, daß die Frequenz der Relaxations schwingungen nahe bei der Modulationsfrequenz liegt, weil dann der Wirkungsgrad der Modulation optimal ist.

Unser herzlicher Dank gilt Herrn Dr. N. NEUROTH von der Firma Schott & Gen., Mainz, für die freundliche Überlassung von Neodymglas-Stäben. Ferner danken wir dem Deutschen Rechenzentrum, Darmstadt, für die Gewährung von Maschinenzzeit an seiner Anlage und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Unterstützung mit Geräten.